1 Allgemeine Eigenschaften eines dreidimensionalen Vektorfeldes

Sei $\boldsymbol{Z}$ ein dreidimensionales Vektorfeld, das im Unendlichen schnell genug abfällt, d.h.

$$\begin{aligned} \lim_{V\to\infty}\int_{\partial V} d\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x})\frac{1}{|\boldsymbol{x}|} &= 0 \\ \lim_{V\to\infty}\int_{\partial V} d\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x})\frac{1}{|\boldsymbol{x}|} &= 0 \end{aligned} \quad , \tag{1}$$

dann ist $\boldsymbol{Z}$ eindeutig festgelegt durch seine **Divergenz**

$$\rho = \nabla\cdot\boldsymbol{Z} \tag{2}$$

und seine **Rotation**

$$\boldsymbol{j} = \nabla\times\boldsymbol{Z} \quad . \tag{3}$$

Die Divergenz ρ von $\boldsymbol{Z}$ nennt man auch seine **Quelldichte** und die Rotation $\boldsymbol{j}$ seine **Stromdichte**. Das Feld läßt sich dann aufspalten in einen **Gradientenanteil** $\boldsymbol{G}$ und einen **Rotationsanteil** $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{R} \quad , \tag{4}$$

wobei

$$\nabla\cdot\boldsymbol{R} = 0 \tag{5}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{G} = 0 \quad . \tag{6}$$

Daher ergibt sich für Quell- und Stromdichte

$$\nabla\cdot\boldsymbol{G} = \rho \tag{7}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{R} = \boldsymbol{j} \tag{8}$$

Gleichungen (5) bis (8) sind **Maxwellartige Gleichungen** für den Gradienten- und den Rotationsanteil von $\boldsymbol{Z}$. Aus (8) folgt

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j} = 0 \quad . \tag{9}$$

Potentiale: Es existiert ein **Skalarpotential** ϕ für $\boldsymbol{Z}$, dessen Gradient gerade den Gradiententanteil $\boldsymbol{G}$ liefert:

$$-\nabla\phi = \boldsymbol{G} \quad . \tag{10}$$

Bildet man die Divergenz der obigen Gleichung, so erhält man die **Poissonartige Gleichung**

$$-\Delta\phi = \rho \quad . \tag{11}$$

Mit Hilfe der Relation

$$\Delta \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} = -4\pi\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \tag{12}$$

läßt sich die allgemeine Lösung dieser Gleichung sofort angeben:

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \, \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} + \phi_0 \quad . \tag{13}$$

Das konstante **Referenzpotential** ϕ_0 stellt eine Eichfreiheit dar. Wir setzen im folgenden $\phi_0 = 0$. Mit (7) läßt sich auch schreiben:

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \, \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} + \phi_0 \quad . \tag{14}$$

Es existiert ein **Vektorpotential** $\boldsymbol{A}$ für $\boldsymbol{Z}$, dessen Rotation gerade den Rotationsanteil $\boldsymbol{R}$ liefert:

$$\nabla \times A = \boldsymbol{R} \quad . \tag{15}$$

Bildet man die Rotation der obigen Gleichung, so erhält man die Gleichung

$$-\Delta\boldsymbol{A} + \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{j} \quad . \tag{16}$$

Mit Hilfe von Relation (12) läßt sich wieder die allgemeine Lösung dieser Gleichung angeben:

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \, \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} + \nabla\chi(\boldsymbol{x}) \quad . \tag{17}$$

Das rotationsfreie Gradientenfeld $\nabla\chi$ stellt eine Eichfreiheit dar, die mit der Divergenz des Vektorpotentials verbunden ist durch:

$$\Delta\chi = \nabla \cdot \boldsymbol{A} \quad . \tag{18}$$

Diese Gleichung hat die spezielle Lösung

$$\chi(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3x' \, \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \quad . \tag{19}$$

Mit (8) läßt sich das Vektorpotential $\boldsymbol{A}$ auch schreiben als

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \, \frac{\nabla \times \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} + \nabla\chi(\boldsymbol{x}) \quad . \tag{20}$$

2 Spezielle Eigenschaften des elektromagnetischen Feldes

Zwar werden das elektrische und das magnetische Feld als voneinander verschiedene Felder angesehen, doch lassen sie sich formal in einem einzigen Feld zusammenfassen, so daß alle Zusammenhänge richtig wiedergegeben werden. Wir betrachten ein genügend schnell abfallendes Vektorfeld $\boldsymbol{Z}$ mit der Divergenz ρ_Z und der Rotation $\boldsymbol{j}_Z$, gegeben durch

$$\rho_Z = \rho + \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \boldsymbol{A} \quad . \tag{21}$$

$$\boldsymbol{j}_Z = \boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E} \quad . \tag{22}$$

Dabei ist $\boldsymbol{E}$ das elektrische Feld und $\boldsymbol{A}$ das Vektorpotential des magnetischen Feldes $\boldsymbol{B}$, d.h.

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \quad . \tag{23}$$

Außerdem ist ρ die elektrische Ladungsdichte, gegeben durch

$$\rho = \nabla \cdot \boldsymbol{E} \tag{24}$$

und

$$\boldsymbol{j} = \rho \boldsymbol{v} \quad , \tag{25}$$

die elektrische Stromdichte zum Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{v}$, in dem sich die Ladungen bewegen. Der Gradientenanteil $\boldsymbol{G}$ von $\boldsymbol{Z}$ berechnet sich aus (7) (hier $\nabla \cdot \boldsymbol{G} = \rho_Z$) und (24) zu

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A} \tag{26}$$

und den Rotationsanteil $\boldsymbol{R}$ identifizieren wir mit dem magnetischen Feld $\boldsymbol{B}$,

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{B} \quad , \tag{27}$$

so daß wir insgesamt erhalten

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \quad . \tag{28}$$

Mit diesen Festlegungen ist das Feld $\boldsymbol{Z}$ gerade so beschaffen, daß seine Maxwellartigen Gleichungen zu den echten Maxwell-Gleichungen werden. Aus (5) und (6), zusammen mit (26) und (27), folgen die

Homogenen Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{29}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} \tag{30}$$

.

Gleichung (7) und (8) ergeben zusammen mit (21) und (22) die

Inhomogenen Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho \tag{31}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E} \tag{32}$$

Aus (9) (hier $\nabla \cdot \boldsymbol{j}_Z = 0$) folgt die

Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial t}\rho = 0 \tag{33}$$

.

Potentiale

Das *Vektorpotential* $\boldsymbol{A}$ hängt mit dem Rotationsanteil von $\boldsymbol{Z}$ zusammen über

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \tag{34}$$

zusammen und schreibt sich gemäß (20) als

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3x' \, \frac{\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} + \nabla\chi(\boldsymbol{x}) \quad , \tag{35}$$

oder, unter Zuhilfenahme von (2), auch als

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3x' \, [\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}](\boldsymbol{x}')\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} + \nabla\chi(\boldsymbol{x}) \quad . \tag{36}$$

Die frei wählbare Eichgröße χ ist ein Skalarfeld, das mit der Divergenz von $\boldsymbol{A}$ gemäß (18) verbunden ist durch

$$\Delta\chi = \nabla \cdot \boldsymbol{A} \quad . \tag{37}$$

Diese Gleichung hat die spezielle Lösung (siehe (19))

$$\chi(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3x' \, \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \quad . \tag{38}$$

Das *Skalarpotential* ϕ wird bestimmt durch den Gradientenanteil von $\boldsymbol{Z}$:

$$\nabla \cdot \phi = \boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A} \quad . \tag{39}$$

Es schreibt sich mit (13) und (21) als

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3x' \, [\rho + \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \boldsymbol{A}](\boldsymbol{x}')\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} + \phi_0 \quad . \tag{40}$$

Unter Verwendung von (38) ergibt sich

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3x' \, \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} + \frac{\partial}{\partial t}\chi(\boldsymbol{x}') + \phi_0 \quad . \tag{41}$$

Das Skalarfeld χ geht also sowohl in das Vektor- wie auch das Skalarpotential ein. Da dieser Zusammenhang den Maxwell-Gleichungen gehorcht, ändert sich dadurch das Z-Feld nicht. über dasselbe Skalarfeld χ:

Eichtransformationen

Das $\boldsymbol{Z}$-Feld ist invariant unter den **Eichtransformationen**

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + \nabla\chi \tag{42}$$

$$\phi \to \phi + \frac{\partial}{\partial t}\chi + \phi_0 \tag{43}$$

Das Skalarpotential ϕ als *Spannungspotential* mit ϕ_0 als *Grundspannung* interpretierbar. Die wesentliche Eichfreiheit besteht in der freien Wählbarkeit der Divergenz des Vektorpotentials. Bestimmte Eichungen vereinfachen bestimmte Gleichungen.